Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$.

Soit G sous-groupe de SO_3

Soit G_0 la composante connexe par arcs de Id dans G

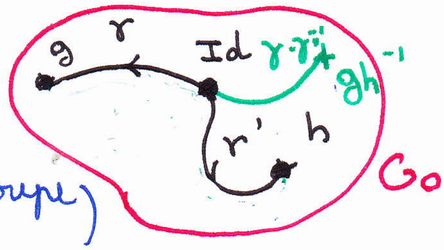
Schéma de la démonstration :

1) On montre que G_0 est un sous-groupe de G
2) On montre que si G est distingué dans SO_3 alors G_0 est distingué
3) $\begin{pmatrix} G \text{ connexe par arcs distingué} \\ \text{non réduit à } \{Id\} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} G \text{ contient une rotation} \\ \text{d'angle } \pi \text{ ; et donc } G = SO_3 \end{pmatrix}$
4) Si $G \triangleleft SO_3$ alors $G = \{Id\}$ ou $G = SO_3$.

---

1) • $Id \in G_0$ (par définition de G_0)

• Soient $g, h \in G_0$; γ et γ' des chemins reliant g et h à Id dans G.



Soit $\gamma'' : [0,1] \longrightarrow SO_3$ (a priori)
$t \longmapsto \gamma(t)(\gamma'(t))^{-1}$

Pour tout $t \in [0,1]$ on a

$\gamma''(t) = \underbrace{\gamma(t)}_{\in G} \underbrace{\gamma'(t)^{-1}}_{\in G} \in G$ (car G sous-groupe de SO_3)

(γ'' relie Id à $gh^{-1} \in G$)

D'autre part $g \mapsto g^{-1}$ et $(g,h) \mapsto gh$ sont continues sur SO_3 ; et γ, γ' sont continues sur $[0,1]$.

Donc, par composition γ'' est continue sur $[0,1]$, donc $gh^{-1} \in G_0$

---

2) On suppose $G \triangleleft SO_3$.

Soit $g \in G_0$; γ un chemin dans G reliant Id à g.

Soit $h \in SO_3$ quelconque. Montrons que $hgh^{-1} \in G_0$.

Soit $\gamma' : [0,1] \longrightarrow SO_3$
$t \longmapsto h\gamma(t)h^{-1}$.

$\forall t \in [0,1]$; $\gamma(t) \in G$, et puisque G est distingué on a que $h\gamma(t)h^{-1} \in G$; donc $\gamma' : [0,1] \to G$.

De plus γ' est continue (par continuité de $g \mapsto g^{-1}$ et $(g,h) \mapsto gh$)

et $\gamma'(0) = Id$; $\gamma'(1) = hgh^{-1}$.

Donc $hgh^{-1} \in G_0$; donc $hG_0h^{-1} \subset G_0$ $\forall h \in SO_3$.

donc $G_0 \triangleleft SO_3$.

---

3) On suppose G connexe par arcs distingué non réduit à $\{Id\}$

Soit $g \in G \setminus \{Id\}$ une rotation d'angle θ

Dans une certaine base orthonormée $\mathcal{B}$, on a

$Mat_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; on a alors $Tr(g) = 2\cos\theta + 1$.

Soit $\phi : SO_3 \to [-1, 1]$
$g \mapsto \cos\theta = \dfrac{Tr(g) - 1}{2}$

$\to \phi$ est une application continue (car $g \mapsto Tr(g)$ est continue)

Montrons que G contient une rotation d'angle θ' tq $\cos\theta' \leq 0$ (on notera u cette rotation)

Quitte à remplacer g par $g^{-1} \in G$ on peut supposer que $\theta \in]0, \pi]$

Si $\cos\theta \leq 0$, on prend $u = g$; sinon on pose $N = \left\lfloor \dfrac{\pi}{2\theta} \right\rfloor$

On a alors $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $N\theta \leq \frac{\pi}{2} < (N+1)\theta \leq \pi$

Alors $g^{N+1} \in G$ est une rotation d'angle $(N+1)\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ et on pose $u = g^{N+1}$.

G étant connexe par arcs il existe un chemin γ reliant Id à u.

Le chemin $\varphi : [0,1] \to [-1, 1]$
$t \mapsto \phi \circ \gamma(t) = \frac{1}{2}(tr(\gamma(t)) - 1)$ est continue

et on a $\varphi(0) = \cos(0) = 1$.
$\varphi(1) = \underbrace{\cos\theta'}_{} \leq 0$
(où θ' angle de u)

donc par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $\varphi(t_0) = 0$.

La rotation $r = \gamma(t_0)$ a alors pour angle $\pm\frac{\pi}{2}$; donc $R = r^2$ a pour angle π. Ainsi R est un retournement d'axe D et donc pour tout $g \in SO_3$; gRg^{-1} est un retournement d'axe $g(D)$. Donc G contient tous les retournements (l'action de SO_3 sur les droites vectorielles étant transitive). Or les retournements engendrent SO_3.

4) On suppose $G \lhd SO_3$

- Si $G_0 \neq \{Id\}$, on a alors $G_0 = SO_3$ (d'après 1) 2) 3)) donc $G = SO_3$.
- On suppose $G_0 = \{Id\}$. Montrons que $G = \{Id\}$.

$G_0 = \{Id\} \Rightarrow$ toutes les composantes connexes par arcs de G sont des singletons. (En effet si $C(g)$ est la composante connexe par arcs de g alors
$g^{-1}C(g) = G_0 = \{Id\}$ (car $h \mapsto g^{-1}h$ est un homéomorphisme)
Donc $C(g) = \{g\}$)

On suppose, par l'absurde que G contient $g \neq Id$.

Soit $h \in SO_3$ une rotation d'angle θ fixé quelconque. $\left(Mat_{\mathcal{B}}(h) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

$\forall t \in [0,1]$ on note h_t la rotation d'angle $t\theta$

$\left(Mat_{\mathcal{B}}(th) = \begin{pmatrix} \cos t\theta & -\sin t\theta & 0 \\ \sin t\theta & \cos t\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$; $\begin{array}{l}[0,1] \to SO_3 \\ t \mapsto h_t\end{array}$ est alors clairement continue

Donc $\gamma : [0,1] \to SO_3$ est continue
$t \mapsto h_t g h_t^{-1} \in G$ (car $G \lhd SO_3$)

c'est un chemin dans G reliant $\gamma(0) = g$ à $\gamma(1) = hgh^{-1}$.

Donc $hgh^{-1} \in \underset{\{g\}}{\underset{\shortparallel}{C(g)}}$; donc $\underbrace{hgh^{-1}}_{\substack{\text{rotation d'axe} \\ h(\Delta)}} = \underbrace{g}_{\text{rotation d'axe } \Delta}$

On aurait donc un axe Δ tel que $h(\Delta) = \Delta$ $\forall h \in SO_3$; ce qui est absurde. Donc $G = \{Id\}$.